Correction du devoir surveillé $n°4$

Problème :

1. (a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car inverse d'une fonction polynomiale de degré 2 avec discriminant strictement négatif. $\boxed{\quad /1}$

(b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$ et $\boxed{\quad /2}$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)^2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4} = 2\frac{-(1+x+x^2)+(2x+1)^2}{(1+x+x^2)^3}$$
$$= \frac{6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$					
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	1		$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f^{(2)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

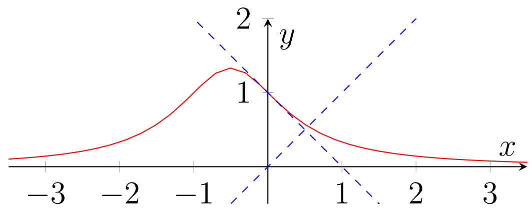
(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \iff 1 = x(x^2+x+1) \iff x^3+x^2+x-1 = 0$.
Posons $g : x \mapsto x^3+x^2+x-1$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2+2x+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc g est strictement croissante. De plus, $g(\frac{1}{3}) = \frac{13}{27} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$ et $g(1) = 2 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, g(\alpha) = 0$ i.e. $f(\alpha) = \alpha$.
De plus, $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. $\boxed{\quad /2}$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+u}$ où $u = x + x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$.
Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + \circ((x+x^2)^3)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^3 + \circ(x^3)$$

Par conséquent, la courbe représentative de f se situe au-dessus de la tangente d'équation $y = 1-x$ au voisinage à droite de 0 et en-dessous au voisinage à gauche de 0. $\boxed{\quad /2}$

(e)



$\boxed{\quad /1}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, $u_0 \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et d'après le tableau de variation de f, l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par f. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$. $\boxed{\quad /1}$

(b) La fonction f' est négative et croissante sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$. Par conséquent, pour tout $x \in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $|f'(x)| = -f'(x) \leqslant -f'(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{5}{3}}{\left(\frac{13}{9}\right)^2} = \frac{135}{169}$. On notera par la suite $C = \frac{135}{169}$. /1

(c) D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, y \in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|$. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $x = u_n$ et $y = \alpha$, on obtient $|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant C|u_n-\alpha|$ i.e.$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant C|u_n-\alpha|$ d'où $|u_n-\alpha| \leqslant C^n|u_0-\alpha| \leqslant C^n$. Or $C^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. /1

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, $C^n \leqslant 10^{-3} \iff n\log(C) \leqslant -3 \iff n \geqslant \frac{3}{\log\left(\frac{169}{135}\right)}$.

Ainsi, pour $n = \left\lfloor \frac{3}{\log\left(\frac{169}{135}\right)} \right\rfloor + 1$, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. /1

3. (a) *Unicité.* Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}} = \frac{Q(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ alors $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, P et Q coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$ donc $P = Q$.
Existence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ suivante : il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$.
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $f^{(0)} : x \mapsto \frac{P_0(x)}{1+x+x^2}$ où $P_0 = 1$. On a $\deg(P_0) = 0$ et $\mathrm{cd}(P_0) = 1$ d'où $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(1+x+x^2)^{n+1} - P_n(x)(n+1)(2x+1)(1+x+x^2)^n}{(1+x+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x+x^2) - P_n(x)(n+1)(2x+1)}{(1+x+x^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

Posons $P_{n+1} = (1+X+X^2)\,P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$, alors $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, $P_{n+1} = (n \times \mathrm{cd}(P_n) - 2(n+1)\mathrm{cd}(P_n))\,X^{n+1} + \cdots = -(n+1)\mathrm{cd}(P_n)X^{n+1} + \ldots$.
Par conséquent, $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et $\mathrm{cd}(P_n) = (-1)^{n+1}(n+2)!$ d'où $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. /4

(b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Notons $g : x \mapsto 1+x+x^2$. On a fg qui est constante en 1 donc $(fg)^{(n)} = 0$. Par ailleurs, d'après la formule de Leibniz, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}$ d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= (1+x+x^2)f^{(n)}(x) + (2x+1)nf^{(n-1)}(x) + 2\binom{n}{2}f^{(n-2)}(x) \\ &= \frac{P_n(x) + n(2x+1)P_{n-1}(x) + n(n-1)\left(1+x+x^2\right)P_{n-2}(x)}{(1+x+x^2)^n} \end{aligned}$$

Par conséquent, le polynôme $P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)\left(1+X+X^2\right)P_{n-2}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ avec le polynôme nul, c'est donc le polynôme nul. /2

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 3)b), $P_{n+1} + (n+1)(2X+1)P_n + n(n+1)\left(1+X+X^2\right)P_{n-1} = 0$.
Par ailleurs, d'après la question 3)a), $P_{n+1} + (n+1)(2X+1)P_n = \left(1+X+X^2\right)P_n'$.
Par conséquent, $P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$. /1

(d) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $P_n(\beta) = P_{n-1}(\beta) = 0$. Par conséquent, $P_{n-2}(\beta) = 0$ d'après la question 3)b) (car $\beta^2+\beta+1 \neq 0$). En itérant le procédé, on remarque que $P_k(\beta) = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. En particulier, $P_0(\beta) = 0$. Absurde car $P_0 = 1$.
Pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, les polynômes P_n et P_{n-1} n'ont aucune racine réelle commune, ce qui est encore vraie pour $n = 1$ car $P_0 = 1$ n'admet pas de racine. /1

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_{n-1} et P_n' ont les mêmes racines d'après la question 3)c). Par conséquent, les polynômes P_n et P_n' n'ont aucune racine réelle commune donc P_n n'admet pas de racine réelle multiple (ce qui reste vraie pour $n = 0$). /1

4. Soit a, un réel fixé et g, une fonction définie, continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ vérifiant

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

(a) La fonction φ définie sur $\left[\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\forall x \in \left[\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right[, \varphi(x) = g(\tan x)$ est une fonction continue sur $\left[\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right[$ par composée. De plus, par composée également, $\varphi(x) = g(\tan x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0 = \varphi(\frac{\pi}{2})$, donc φ est continue sur $\left[\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right]$. Par composée encore, φ est dérivable sur $\left]\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right[$. On remarque que $\varphi(\operatorname{Arctan}(a)) = g(a) = 0 = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'après le théorème de Rolle sur φ, il existe $d \in]\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$ tel que $\varphi'(d) = 0$. /2

(b) Pour tout $x \in]\operatorname{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$, $\varphi'(x) = \frac{g'(\tan(x))}{1+x^2}$. D'où $g'(\tan(d)) = 0$.
En posant $c = \tan(d)$, $c \in]a, +\infty[$ et $g'(c) = 0$. /1

5. (a) D'après la question 1)b), $P_0 = 1$ admet aucune racine, $P_1 = -2X - 1$ a une seule racine $(-\frac{1}{2})$ qui est réelle et $P_2 = 6X(X+1)$ possède exactement deux racines (0 et -1), qui sont réelles et distinctes. /1

(b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$: on suppose que P_n possède n racines réelles distinctes, notées et classées comme : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. /2

i. Pour tout $k \in [\![1, n]\!], f^{(n)}(\alpha_k) = \frac{P_n(\alpha_k)}{\left(1+\alpha_k+\alpha_k^2\right)^{n+1}} = 0$. On peut donc utiliser le théorème de Rolle pour $f^{(n)}$ sur les intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(\beta_i) = 0$.

ii. On a $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0$ car $\deg(P_n) < \deg\left((1+X+X^2)^{n+1}\right)$. D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe $\beta_n \in]\alpha_n, +\infty[$ tel que $f^{(n+1)}(\beta_n) = 0$.
Avec les mêmes arguments, il existe $\beta_0 \in]-\infty, \alpha_1[$ tel que $f^{(n+1)}(\beta_0) = 0$.

iii. La fonction $f^{(n+1)}$ s'annule en $\beta_0, \ldots, \beta_n$ qui sont $(n+1)$ réels distincts. Par conséquent, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_{n+1}(\beta_i) = f^{(n)}(\beta_i)\left(1+\beta_i+\beta_i^2\right)^{n+2} = 0$. De plus, $\deg(P_{n+1}) = n+1$, donc le polynôme P_{n+1} possède exactement $(n+1)$ racines réelles distinctes.

(c) La récurrence est établie grâce à l'initialisation prouvée dans la question 5)a) et à l'hérédité prouvée dans la question 5)b). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n possède exactement n racines réelles deux à deux distinctes. /1